Egzamin z Rachunku prawdopodobieństwa II – 25.01.2024

Spośród poniższych zadań proszę wybrać 5. Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 12 punktów. W przypadku oddania 6 zadań, do oceny będzie się liczyć 5 ocenionych najniżej. Odpowiedzi proszę udzielać w postaci zwartych wzorów. Mogą być wyrażone w terminach dystrybuanty standardowej zmiennej gaussowskiej. Należy precyzyjnie uzasadniać rozwiązania, powołując się na odpowiednie fakty z wykładu lub ćwiczeń.

A1 Rozważmy nieskończoną tablicę niezależnych zmiennych losowych $(X_{n,i})_{n,i=1}^{\infty}$, taką że dla $n, i \geqslant 1$, zmienna $X_{n,i}$ spełnia $\mathbb{P}(X_{n,i} = 1) = 1/n$, $\mathbb{P}(X_{n,i} = 0) = 1 - 1/n$. Dla $n \geqslant 1$, niech $T_n = \inf\{i \geqslant 1 \colon X_{n,1} + \ldots + X_{n,i} = 2\}$ oraz

$$Y_n = \frac{T_n}{n}.$$

Czy ciąg $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ zbiega według rozkładu? Jeśli tak – wyznaczyć granicę, w przeciwnym przypadku – uzasadnić brak zbieżności.

A2 Niech X będzie dowolną zmienną losową. Zdefiniujmy funkcję $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wzorem

$$\psi(t) = \mathbb{E}\frac{1}{1 - itX}.$$

Wykazać, że funkcja $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zadana wzorem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2 - \psi(t)}.$$

jest funkcją charakterystyczną.

A3 Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$. Niech dla $n \geqslant 1$,

$$Z_n = \Big(\frac{X_1 \cdot X_3 \cdot \cdots \cdot X_{2n-1}}{X_2 \cdot X_4 \cdot \cdots \cdot X_{2n}}\Big)^{1/\sqrt{n}}.$$

Dla $t \in \mathbb{R}$ zbadać istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leqslant t)$. Jeśli granica istnieje – wyznaczyć ją, w przeciwnym wypadku uzasadnić brak zbieżności.

A4 Niech $(X_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ będzie macierzą niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Zdefiniujmy zmienne N_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, wzorem

$$N_0 = 1, \quad N_{n+1} = \sum_{j=1}^{N_n} X_{n+1,j} \text{ dla } n \geqslant 0.$$

a) Wykazać, że $M_n = N_n/2^n$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(N_0, \ldots, N_n)$, $n \geqslant 0$.

b) Czy M_n jest zbieżny p.n.? Czy jest zbieżny w L_2?

A5 Bolek i Lolek grają w bierki. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Bolka wynosi 1/3. Całą rozgrywkę wygrywa Bolek jeśli uda mu się wygrać dwie partie pod rząd zanim Lolek wygra trzy partie pod rząd. W przeciwnym przypadku rozgrywkę wygrywa Lolek.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że rozgrywkę wygra Bolek.

b) Obliczyć oczekiwaną liczbę partii do zakończenia rozgrywki.

A6 Pan X. codziennie wracając z pracy kupuje hamburgera, hot doga albo frytki. Jeśli pan X. kupił hamburgera, to następnego dnia powtarza ten wybór z prawdopodobieństwem 1/2, jeżeli kupił hot doga, również powtarza wybór z prawdopodobieństwem 1/2, a jeśli kupił frytki, powtarza wybór z prawdopodobieństwem 1/4. Jeżeli pan X. nie decyduje się na powtórzenie swojego poprzedniego wyboru, to kupuje jedno z pozostałych dań, z równymi prawdopodobieństwami. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że 22 lipca 2025 roku pan X. kupi hot doga, jeśli wiadomo, że wczoraj jadł frytki.